Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ I**

ESAME DEL 30.6.2026 (L-Z) (Docente: L. Bertini)

COGNOME, NOME (in stampatello) ________________________________

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi, giustificando brevemente i passaggi svolti, utilizzando **esclusivamente** questi fogli.

VALUTAZIONE. Gli esercizi 1 e 2 sono valutati fino ad un massimo di 14 punti ciascuno. All'esercizio 3, più impegnativo, non viene attribuito un punteggio numerico, ma un giudizio separato; per ottenere un voto finale superiore a 27/30 è necessario svolgerlo in modo soddisfacente.

Esercizio 1. Si estraggono a caso (senza rinserimento) tre carte da un mazzo di 40 carte divise in 4 semi (denari, coppe, spade e bastoni) e numerate da 1 a 10.

a) Descrivere il corrispondente spazio di probabilità.

b) Calcolare la probabilità di avere una napoletana (1,2 e 3 dello stesso seme).

c) Calcolare la probabilità che le tre carte estratte siano di semi diversi.

d) Sapendo che tra le tre carte estratte vi è l'asso di denari, calcolare la probabilità che questo sia stato il primo estratto.

Esercizio 2. Si consideri un urna con n palline. Ogni pallina, l'una indipendentemente dall'altra, viene dipinta di rosso con probabilità p o di blu con probabilità $1-p$, $p \in [0,1]$. Si estraggono poi, senza rimpiazzo, k palline dall'urna, $k \leq n$. Siano Y il numero delle palline dipinte di blu e X il numero di palline blu estratte.

a) Determinare le distribuzioni marginali delle variabili aleatorie X e Y.

b) Determinare la distribuzione di Y condizionata a X.

c) Determinare la distribuzione di X condizionata a Y.

d) Calcolare la covarianza tra X e Y.

Esercizio 3.* (CONFRONTO TRA BINOMIALE E POISSON)
Siano $p \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$, e si ponga $\lambda := np$. Siano inoltre $P(k) = P_{n,p}(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ e $Q(k) = Q_\lambda(k) := e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, rispettivamente le distribuzioni binomiali di parametri n, p e Poisson di parametro λ. Si conviene che $P(k) = 0$ per $k > n$.

a) Sia $A(k) := \frac{P(k)}{Q(k)}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Dimostrare che la successione $(A(k))_k$ è crescente per $k \leq k_*$ e decrescente per $k > k_*$. Trovare inoltre il valore di k_* mostrando che dipende esclusivamente da λ.

b) Dimostrare che al crescere di $k \in \mathbb{Z}_+$ si ha inizialmente $P(k) < Q(k)$, poi $P(k) > Q(k)$ ed infine nuovamente $P(k) < Q(k)$.

c) Si consideri il limite $n \to \infty$, $p \to 0$ con $\lambda = np$ fisso. Dimostrare che $P_{n,p}(k)$ converge a $Q_\lambda(k)$ **uniformemente** per $k \in \mathbb{Z}_+$.

d) Nel medesimo limite del punto precedente, dire, giustificando la risposta, se $\frac{P_{n,p}(k)}{Q_\lambda(k)}$ converge ad 1 uniformemente per $k \in \mathbb{Z}_+$.
