



Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ I**

ESAME DEL 15.7.2026 (L-Z) (Docente: L. Bertini)

COGNOME, NOME (in stampatello) _____

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi, giustificando brevemente i passaggi svolti, utilizzando **esclusivamente** questi fogli.

VALUTAZIONE. Gli esercizi 1 e 2 sono valutati fino ad un massimo di 14 punti ciascuno. All'esercizio 3, più impegnativo, non viene attribuito un punteggio numerico, ma un giudizio separato; per ottenere un voto finale superiore a 27/30 è necessario svolgerlo in modo soddisfacente.

Esercizio 1. In un dipartimento di psicostoria, le aule I e II possono accogliere 50 studenti ciascuna, mentre l'aula III può accoglierne 100. Per seguire il corso di probabilità in tali aule, 200 matricole vengono divise in tre gruppi (di 50, 50 e 100 studenti).

a) In quanti modi si possono creare i tre gruppi?

b) In quanti modi si possono assegnare gli studenti nelle tre aule?

Alyona e Bogdana vorrebbero seguire il corso insieme per aiutarsi nello studio, ma vorrebbero evitare di ritrovarsi in classe con l'insopportabile Vadik.

c) Supponendo venga effettuata una divisione casuale degli studenti nelle aule, calcolare la probabilità che tale desiderio si avveri.

Esercizio 2. Alberto (A) e Bruno (B) partecipano ad un gioco a premi. Essi dispongono di un dado equilibrato a 6 facce, e di due monete (una per A ed una per B), ciascuna, indipendentemente dall'altra, rende testa (T) con probabilità $p \in (0, 1)$ e croce (C) con probabilità $1 - p$. Prima si lancia il dado. Se il risultato vale 1, i partecipanti non vincono niente. Se invece il risultato del dado è strettamente superiore a 1, ciascuno dei due partecipanti lancia la sua moneta fino a quando non ottiene T, e vince tanti euro quanti sono i lanci della moneta che egli ha effettuato. Siano X ed Y le vincite in euro di A e B.

- a)* Dire, giustificando la risposta, se X ed Y sono variabili aleatorie indipendenti. Se non risultano indipendenti dire se X e Y sono positivamente o negativamente correlate; non è richiesto alcun calcolo, ma è necessario illustrare la motivazione euristica.
 - b)* Determinare la distribuzione di X ed Y .
 - c)* Calcolare il valore di attesa di X ed Y .
 - d)* Calcolare il valore di attesa di Y condizionato a X .
-

Esercizio 3.* Per $s > 1$ sia $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. Sia inoltre X la variabile aleatoria a valori in $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ con distribuzione data da $\mathbb{P}(X = n) = 1/[n^s \zeta(s)]$, $n \in \mathbb{N}$. Per $p \in \mathbb{N}$ sia infine E_p l'evento $\{X \text{ è divisibile per } p\}$.

a) Determinare per quali $p, q \in \mathbb{N}$ gli eventi E_p e E_q sono indipendenti.

b) Dimostrare che gli eventi $\{E_p\}_{p \text{ primo}}$ sono indipendenti.

c) Calcolando $\mathbb{P}(X = 1)$, verificare l'identità $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$

d) Sia Y una copia indipendente della variabile aleatoria X , ovvero Y ed X sono indipendenti ed hanno la stessa distribuzione. Calcolare la probabilità dell'evento $\{X \text{ e } Y \text{ sono primi tra loro}\}$.
