Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2025-26
Probabilità 1, (L-Z) (Docente: L. Bertini)
Esercizi settimanali

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

Settimana 1

Esercizio 1. Dimostrare le seguenti relazioni insiemistiche:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
$$(A \cap B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}}$$

Esercizio 2. Sia $(\Omega, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità, e siano A, B e C tre eventi. Supponiamo di sapere $A \cap B \cap C = \emptyset$ e $\mathbb{P}(A \cap C) = 1/5$ e $\mathbb{P}(B \cap C) = 2/5$.

1) Calcolare $\mathbb{P}((A \cup B) \cap C)$

2) Quali sono i possibili valori di $\mathbb{P}(A \cap B)$? (Ad esempio, può essere $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$?)

Esercizio 3.

1) Se $\mathbb{P}(A) = 1/3$ e $\mathbb{P}(B^c) = 1/4$, A e B possono essere eventi disgiunti?

2) Se $\mathbb{P}(A) = 1/4$ e $\mathbb{P}(A \cup B) = 3/4$, quanto vale $\mathbb{P}(B)$ nel caso che A e B siano disgiunti?

3) Se $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 3/8$, può verificarsi che $\mathbb{P}(A \cup B) = 1/4$? E $\mathbb{P}(A \cup B) = 7/8$?

4) Siano $\mathbb{P}(A) = 3/4$ e $\mathbb{P}(B) = 3/8$. Si verifichi che $1/8 \le \mathbb{P}(A \cap B) \le 3/8$.

5) Si dimostri la diseguaglianza:

$$\mathbb{P}(A \cap B) \ge \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

Esercizio 4. Sia A, B e C eventi di uno spazio di probabilità. Esprimere la probabilità che almeno uno di essi si verifichi in termini delle probabilità di A, B, C e delle loro intersezioni.

Esercizio 5. La prima sessione di esami del II semestre prevede gli esami A, B e C. Le percentuali di studenti promossi sono le seguenti:

- 40% per l'esame A,
- 50% per l'esame B,
- 30% per l'esame C,
- 35% per gli esami A e B,
- 20% per gli esami A e C,
- 25% per gli esami B e C,
- 15% per tutti e tre gli esami

Determinare la probabilità che nella prima sessione uno studente (suggerimento: utilizzare l'esercizio precedente):

1) non superi l'esame A;

2) superi A ma non superi B;

3) superi almeno un esame;

4) non superi alcun esame.

Esercizio 6. Si lanciano 2 dadi equi, uno di colore rosso, l'altro di colore blu.

1) Descrivere lo spazio degli eventi elementari Ω.

2) Descrivere, come sottoinsiemi di Ω, i seguenti eventi: "il dado rosso vale 5", "uno dei due dadi vale 5", "entrambi i dadi valgono 5", "nessun dado vale 5", "la somma dei dadi vale 5".

3) Calcolare la probabilità degli eventi nel punto precedente.

Esercizio 7. Sia Ω un insieme finito non-vuoto ed $H\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione data. Per ogni $\beta \geq 0$, definiamo una probabilità $\mathbb{P}_\beta$ su Ω ponendo per ogni $\omega \in \Omega$ (si ricordi che su spazi finiti la probabilità è identificata dal suo valore sui singoletti)

$$\mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = \frac{e^{-\beta H(\omega)}}{Z_\beta}$$

dove Z_β è un numero reale positivo. Poniamo inoltre

$$m := \min_{\omega\in\Omega} H(\omega) \qquad E_m := \{\omega \in \Omega \,:\, H(\omega) = m\} = H^{-1}(\{m\})$$

1) Si scriva Z_β in funzione di β (ed H).

2) Verificare che se $\beta = 0$ allora $\mathbb{P}_\beta$ è la probabilità uniforme su Ω.

3) Verificare che

$$\lim_{\beta\to+\infty} \mathbb{P}_\beta(E_m) = 1$$

(o, come si dice, che $\mathbb{P}_\beta$ si concentra sui minimi di H quando $\beta \to +\infty$).

4) Calcolare $\lim_{\beta\to+\infty} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\})$ per ogni $\omega \in \Omega$.

Esercizio 8.* (Asintotica del problema dei compleanni) Sia

$$p_N(k) = 1 - \frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)}{N^k}$$

la probabilità per il problema dei compleanni. Si osservi che, per k fissato, $p_N(k)$ è un polinomio in $1/N$. Si consideri l'asintotica per k fisso e $N \to \infty$.

1) Dimostrare che

$$p_N(k) = C_1(k)\frac{1}{N} + o\big(\tfrac{1}{N}\big)$$

e calcolare $C_1(k)$.

2) Dimostrare che

$$p_N(k) = C_1(k)\frac{1}{N} + C_2(k)\frac{1}{N^2} + o\big(\tfrac{1}{N^2}\big)$$

e calcolare $C_2(k)$.