Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2025-26

Probabilità I, (L-Z) (Docente: L. Bertini)

ESERCIZI SETTIMANALI

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

SETTIMANA 2

Esercizio 1. Un'associazione è formata da 25 iscritti. Tra questi devono essere scelti un presidente ed un segretario (lo stesso associato non può ricoprire entrambe le cariche).

1) Quanti sono i modi possibili per ricoprire le due cariche?

2) Se gli individui vengono scelti a caso per ricoprire le cariche, qual è la probabilità che un assegnato membro dell'associazione ne ricopra una?

3) Si supponga ora che nella medesima associazione debbano essere scelti due sguatteri. Quante sono le possibili scelte?

Esercizio 2. Quanti sono gli anagrammi (anche senza senso) delle parole: RISO, PATATE e COZZE.

Esercizio 3. Vengono estratte 5 carte a caso da un mazzo di 52 carte francesi. Calcolare la probabilità di ottenere:

1) poker;

2) colore;

3) full;

4) doppia coppia (ma non un full);

5) tris (ma né poker né full).

Esercizio 4. In un dipartimento di psicostoria, le aule I e II possono accogliere 50 studenti ciascuna, mentre l'aula III può accoglierne 100. Per seguire il corso di probabilità in tali aule, 200 matricole vengono divise in tre gruppi (di 50, 50 e 100 studenti).

1) In quanti modi si possono creare i tre gruppi?

2) In quanti modi si possono assegnare gli studenti nelle tre aule?

Alyona e Bogdana vorrebbero seguire il corso insieme per aiutarsi nello studio, ma vorrebbero evitare di ritrovarsi in classe con l'insopportabile Vadik.

3) Supponendo venga effettuata una divisione casuale degli studenti nelle aule, calcolare la probabilità che tale desiderio si avveri.

Esercizio 5. Dimostrare il principio di esclusione/inclusione.

Esercizio 6. Un mazzo di carte napoletane è costituito da 40 carte di 4 semi distinti (denominati denari, coppe, spade e bastoni), numerate dall'asso al re.

In una partita di tresette si distribuiscono 10 carte a ciascuno dei 4 giocatori. Un giocatore ottiene una *napoletana* se riceve asso, due e tre dello stesso seme.

Voi siete al tavolo, e ricevete la vostra mano di 10 carte.

1) Calcolare la probabilità che otteniate una napoletana di bastoni (asso, due e tre di bastoni).

2) Calcolare la probabilità che otteniate contemporaneamente una napoletana di bastoni e di coppe.

3) Calcolare la probabilità che otteniate almeno una napoletana.

Esercizio 7. Alfredo e Bianca escono la sera con 5 amici. Cominciano la serata con un aperitivo al bar. Davanti al bancone ci sono 7 sgabelli vuoti in fila e ciascuno sceglie uno sgabello a caso. Qual è la probabilità che Alfredo e Bianca si siedano vicini? Dopo si recano al ristorante, dove gli viene assegnato un tavolo rotondo con 7 sedie e ciascuno sceglie una sedia a caso. Qual è la probabilità che Alfredo e Bianca si siedano vicini?

Esercizio 8. Siano S, S' insiemi finiti con $|S| = n$ e $|S'| = k$. Rispondere alle seguente domande al variare di $n, k \in \mathbb{N}$

1) Quante sono le funzioni da S a S'?

2) Quante sono le funzioni iniettive da S a S'?

3) Quante sono le funzioni biunivoche da S a S'?

*4)** Quante sono le funzioni suriettive da S a S'? (Suggerimento: utilizzare il principio di inclusione/esclusione)

Esercizio 9. Si dispone di una moneta bilanciata, ossia che rende testa (T) o croce (C) con uguale probabilità.

1) Calcolare la probabilità p_2 di ottenere 2 volte T lanciando $n = 2$ volte la moneta.

2) Calcolare la probabilità p_3 di ottenere (almeno) 2 T *consecutive* lanciando $n = 3$ volte la moneta.

*3)** Calcolare la probabilità p_n di ottenere (almeno) 2 T *consecutive* lanciando n volte la moneta, per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 10.* Dato un insieme (finito) Ω, una *partizione* $\{D_i\}$ di Ω è una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di Ω con le proprietà $\Omega = \bigcup_i D_i$ con $D_i \cap D_j = \emptyset$ per $i \neq j$. Sia d_n il numero di partizioni di un insieme di cardinalità n. Poniamo, per convenzione, $d_0 = 1$.

1) Dimostrare la relazione ricorsiva

$$d_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$$

2) Via induzione in n verificare quindi l'identità

$$d_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$