



Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2025-26  
**Probabilità I, (L-Z)** (Docente: L. Bertini)  
ESERCIZI SETTIMANALI

Gli esercizi e le domande contrassegnate con \* sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

SETTIMANA 3

**Esercizio 1.** Carletto deve fare il compito in classe di matematica. Nel sussidiario ci sono 50 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 30 di geometria non commutativa e 10 di statistica bayesiana. Carletto non sa assolutamente nulla di tali materie, impara quindi a memoria 20 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 10 di geometria non commutativa e 5 di statistica bayesiana. Al momento del compito, Carletto svolge solo gli esercizi che ha imparato a memoria.

- 1) Se la maestra prepara un compito scegliendo a caso, tra gli esercizi del sussidiario, 4 esercizi di geometria commutativa, con quale probabilità Carletto riesce a svolgere tutti gli esercizi di geometria commutativa?

Si supponga invece che la maestra prepari il compito scegliendo a caso, tra gli esercizi del sussidiario, 5 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 4 esercizi di geometria non commutativa e 1 esercizio di statistica bayesiana.

- 2) Quanti compiti diversi può preparare la maestra? (compiti che differiscono solo per l'ordine degli esercizi non sono considerati diversi)
- 3) Con quale probabilità Carletto svolge tutti i 10 esercizi?
- 4) Con quale probabilità Carletto svolge 3 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 2 di geometria non commutativa e 1 di statistica bayesiana?

**Esercizio 2.** Alice (A), Barbara (B) e Carlo (C) competono tra loro in un torneo con le seguenti modalità. Nel primo incontro si sfidano A e B. Il vincitore gioca poi contro C, se vince anche questo incontro è proclamato vincitore assoluto; se invece vince C, costui gioca contro il perdente dell'incontro precedente e così di seguito. Il primo giocatore a vincere due incontri consecutivi vince il torneo. Si tenga presente che A,B,C hanno la stessa abilità nel gioco e pertanto ogni incontro è vinto da uno dei due contendenti con probabilità  $1/2$ .

- 1) Calcolare la probabilità che il torneo finisca dopo  $n$  incontri,  $n \geq 2$ .
- 2) Calcolare le probabilità di vittoria per A,B e C.
- 3) Il torneo potrebbe non avere mai termine?

**Esercizio 3.** (COUPON COLLECTOR) Si consideri un album con  $n$  figurine.

- 1) Calcolare la probabilità di completare l'album comprando  $k$  figurine,  $k \geq n$  (si supponga probabilità uniforme sulla  $k$ -pla di figurine comprate).
- 2) Utilizzando la subadditività della probabilità, dare una stima, senza usare la calcolatrice, di quante figurine bisogna acquistare per avere una probabilità superiore al 90% di completare un album di 100 figurine.
- 3) Se si acquista una figurina al giorno, calcolare la probabilità di completare l'album esattamente dopo  $k$  giorni,  $k \geq n$ .

**Esercizio 4.** Armando gioca 10 partite alla roulette puntando sul rosso 1 euro a partita. La probabilità di vincere una singola partita è  $18/37$

- 1) Calcolare la probabilità che Armando vinca per la prima volta alla quinta partita.

- 2) Calcolare la probabilità che armando vinca almeno 2 partite.
- 3) Calcolare la probabilità che alla fine delle 10 partite il capitale di Armando sia aumentato di 2 euro.

**Esercizio 5\*** (FORMULA DI STIRLING) Lo scopo di questo esercizio è dimostrare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1$$

svolgendo i seguenti passi.

- 1) Via integrazione per parti, verificare che

$$n! = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt$$

- 2) Via cambi di variabile, verificare che

$$n! = n^{n+1} e^{-n} \int_{-1}^{\infty} e^{-n\phi(t)} dt, \quad \phi(t) = t - \log(1+t).$$

Osservare che  $\phi$  è convessa ed assume minimo per  $t = 0$ .

- 3) L'approssimazione di Stirling si ottiene ora sostituendo a  $\phi$  il suo sviluppo quadratico intorno al minimo. Più precisamente, utilizzando  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}$ , si verifichi che

$$n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} = n^{n+1} e^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n\frac{1}{2}t^2} dt.$$

A questo punto l'affermazione voluta è equivalente a (verificare!)

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left\{ \int_{-1}^{\infty} e^{-n\phi(t)} dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n\frac{1}{2}t^2} dt \right\} = 0$$

- 4) Si consideri il contributo degli integrali in (1) per  $|t| < 1/n^\alpha$ . Utilizzando lo sviluppo di Taylor, verificare che se  $\alpha > 3/8$  tale contributo converge effettivamente a zero.
- 5) Si consideri il contributo del secondo integrale in (1) per  $|t| > 1/n^\alpha$ . Via calcolo diretto verificare che se  $\alpha < 1/2$  tale contributo converge effettivamente a zero.
- 6) Si consideri infine il contributo del primo integrale in (1) negli intervalli  $(-1, -1/n^\alpha)$  e  $(1/n^\alpha, \infty)$ . Utilizzando la convessità di  $\phi$  ( $\phi$  è "sopra" la retta tangente) verificare che se  $\alpha < 1/2$  tale contributo converge effettivamente a zero.

**Esercizio 6\*** Due numeri sono estratti a caso con rimpiazzo da  $\{1, \dots, n\}$ .

- 1) Calcolare la probabilità  $q_n$  che i due numeri estratti siano primi tra loro (ovvero non abbiano divisori comuni). [SUGG. Utilizzare il principio di esclusione/inclusione]
- 2) Indicando con  $\mathcal{P}$  i numeri primi, verificare che  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$

$$3) \text{ Dimostrare l'identità } \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

[SUGG. Utilizzare la serie geometrica ed il teorema fondamentale dell'aritmetica]

Oss. Poiché  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$  (la dimostrazione di questa identità non è però richiesta), si conclude che  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 6/\pi^2$ .