Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2025-26

Probabilità I, (L-Z) (Docente: L. Bertini)

ESERCIZI SETTIMANALI

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

SETTIMANA 4

Esercizio 1. Vengono lanciati 2 dadi regolari.

1) Mostrare che l'evento "la somma dei dadi fa sette" è indipendente dal risultato del primo dado.

2) Mostrare che l'evento "la somma dei dadi fa nove" non è indipendente dal risultato del primo dado.

3) Dare una spiegazione intuitiva della diversità tra i due casi precedenti.

Esercizio 2. Siano $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ eventi. Dimostrare che $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ sono indipendenti se e solo se $\{A_i^c\}_{i=1,\dots,n}$ sono indipendenti.

Esercizio 3. Per $n \in \mathbb{N}$ e $p \in (0,1)$ si consideri la distribuzione binomiale (numero di teste in n lanci di moneta truccata)

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, \dots, n.$$

Dimostrare che $P(k)$ è crescente per $k \le \bar{k}$ per un oppurtuno $\bar{k} = \bar{k}(n,p)$ (da trovare) e decrescente per $k > \bar{k}$.

Esercizio 4. Si dispone di una moneta truccata con parametro di truccatura p incognito che si vuole determinare con il criterio di *massima verosimiglianza*, ovvero determinando il valore $\hat{p}$ che massimizza la probabilità dell'evento osservato.

1) Si lancia la moneta n volte ottenendo testa k volte. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza per p.

2) Si lancia la moneta finché si ottiene una testa, diciamo al h-esimo lancio. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza per p.

Esercizio 5.

1) Siano $B, N, n \in \mathbb{N}$ con $B, N \ge n$. Dimostrare mediante un'interpretazione probabilistica la formula

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{B}{k}\binom{N}{n-k} = \binom{N+B}{n}.$$

2) Per $x \in \mathbb{R}$ e $B, N \in \mathbb{N}$ si consideri l'identità

$$(1+x)^{N+B} = (1+x)^N (1+x)^B.$$

Utilizzando lo sviluppo del binomio e il principio di identità dei polinomi dimostrare la formula del punto precedente senza alcuna interpretazione probabilistica.

3) Alice e Bob lanciano una moneta equa n volte ciascuno. Calcolare la probabilità che ottengano lo stesso numero di teste.

Per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ si definisce $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ e, per convenzione, $\binom{\alpha}{0} := 1$.

4) * Verificare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in (-1,1)$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

5) * Dire se la formula del punto 1. è vera per ogni $B, N \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6. (Un teorema limite per la distribuzione ipergeometrica) Per $n, b, k \in \mathbb{N}$, si consideri la *distribuzione ipergeometrica*

$$P_{n,b,k}(h) = \frac{\binom{b}{h}\binom{n}{k-h}}{\binom{b+n}{k}}, \qquad h = 0, \dots, k.$$

1) Calcolare il limite di $P_{n,b,k}$ per $b, n \to \infty$ con $b/(b+n) \to p \in (0,1)$ (k è fisso).

2) Discutere l'interpretazione del risultato, per esempio considerando un problema di estrazioni da urne.

Esercizio 7. Si considerino lanci ripetuti di una moneta truccata in modo che la probabilità di ottenere testa sia $p \in (0,1)$. Dati $a, b \geq 1$, calcolare la probabilità che la moneta renda a volte testa prima di b volte croce.

Esercizio 8. È noto che i gemelli possono essere omozigoti, in questo caso sono necessariamente dello stesso sesso, oppure eterozigoti, e in questo caso sono dello stesso sesso nel 50% dei casi. Sia p la probabilità che due gemelli siano omozigoti.

1) Calcolare, in funzione di p, la probabilità che 2 gemelli siano omozigoti sapendo che sono dello stesso sesso.

2) Calcolare, in funzione di p, la probabilità che 2 gemelli siano di sesso diverso.

Esercizio 9.* (Problema delgli accoppiamenti via probabilità condizionata) Si consideri il problema degli accoppiamenti, ovvero la scelta casuale di una permutazione di $\{1, \dots, n\}$.

1) Sia q_n la probabilità che la permutazione scelta non abbia punti fissi. Condizionando rispetto all'immagine del punto 1 ed utilizzando la formula delle probabilità totali ricavare una formula ricorsiva per q_n in funzione di q_{n-1} e q_{n-2}.
Sugg. Se 1 finisce in i con $i \neq 1$ distinguere i casi in cui i è finito in 1 oppure no.

2) Risolvere la ricorsione e riottenere la stessa espressione ricavata via inclusione/esclusione.

3) Utilizzare lo stesso metodo per ricavare la probabilità che una permutazione scelta a caso abbia (esattamente) k punti fissi, $k = 0, \dots, n$.