



Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2025-26
Probabilità I, (L-Z) (Docente: L. Bertini)
ESERCIZI SETTIMANALI

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

SETTIMANA 5

Esercizio 1. Un canale di comunicazione trasmette segnali binari. A causa del rumore di fondo alcune volte viene trasmesso 0, ma è ricevuto 1; altre volte viene trasmesso 1 e ricevuto 0. Si assuma che

- la probabilità che uno 0 sia ricevuto correttamente è 0.94;
- la probabilità che un 1 sia ricevuto correttamente è 0.91.

Viene spedito un singolo bit, che con probabilità 0.45 è uno 0 e con probabilità 0.55 è un 1. Calcolare:

- 1) la probabilità che venga ricevuto 1;
- 2) la probabilità che venga ricevuto 0;
- 3) la probabilità che sia stato trasmesso 1 se si è ricevuto 1;
- 4) la probabilità che sia stato trasmesso 0 se si è ricevuto 0;
- 5) la probabilità che si verifichi un errore di trasmissione.

Esercizio 2. Si dispone di n lampadine, $n \in \mathbb{N}$, ognuna delle quali, l'una indipendentemente dalle altre, è funzionante con probabilità p e fulminata con probabilità $1 - p$, con $p \in [0, 1]$.

- 1) Disponendo le lampadine in serie, calcolare la probabilità che il circuito funzioni (se e solo se tutte le lampadine funzionano).
- 2) Disponendo le lampadine in parallelo, calcolare la probabilità che il circuito funzioni (se e solo se almeno una lampadina funziona).

Esercizio 3. Si consideri un'urna contenente una pallina rossa ed una verde. Si estrae una prima pallina e, osservandone il colore, la si reimmette nell'urna con una pallina dello stesso colore. Vengono effettuate di seguito altre 2 estrazioni, modificando di volta in volta la composizione dell'urna con la regola illustrata sopra. Sia R_i , per $i = 1, 2, 3$, l'evento "l' i -esima pallina estratta è rossa".

- 1) Calcolare $\mathbb{P}(R_1|R_2)$.
- 2) Calcolare $\mathbb{P}(R_3|R_2)$.
- 3) Calcolare $\mathbb{P}(R_1|R_3)$.

Esercizio 4. In un'urna ci sono tre monete: la prima è equa ed ha testa (T) su di una faccia e croce (C) sull'altra, la seconda ha C su entrambe le facce, la terza ha T su entrambe le facce.

- 1) Si estrae a caso una moneta dall'urna e la si lancia senza guardare di quale moneta si tratti. Calcolare la probabilità che esca T.
- 2) Sapendo che la moneta ha reso T, calcolare la probabilità che sull'altra faccia ci sia C.
- 3) Si raccoglie ora la moneta (senza guardare che moneta sia) e la si lancia nuovamente. Calcolare la probabilità che la moneta renda ancora T.
- 4) La procedura descritta nel punto precedente viene ripetuta n volte, $n \in \mathbb{N}$, e la moneta rende T ogni volta. Calcolare, in funzione di n , la probabilità che la moneta sia quella con T su entrambe le facce.

Esercizio 5. Tre sentieri collegano i bivacchi A, B e C in modo che da ciascun bivacco si possa raggiungere uno qualunque degli altri due con un sentiero diretto. A causa di frane, ciascun sentiero può essere non percorribile. Sia $p_{AB} \in (0, 1)$ (rispettivamente p_{BC}, p_{AC}) la probabilità che il sentiero che collega A con B (rispettivamente B con C, A con C) sia percorribile. Si assuma che lo stato di agibilità di ciascun sentiero sia indipendente dagli altri. Vi trovate al bivacco A.

- 1) Calcolare la probabilità che possiate arrivare al bivacco C.
- 2) Un alpinista vi ha detto che non è possibile arrivare a C per via delle frane. Calcolare la probabilità che possiate comunque arrivare a B.

Supponiamo ora che tra A e B via siano 3 sentieri diretti, ciascuno percorribile con probabilità q indipendentemente dagli altri.

- 3) Calcolare le due probabilità precedenti (senza rifare tutti i calcoli).

Esercizio 6. (THE MONTY HALL PROBLEM: CAPRE E AUTOMOBILI) In uno spettacolo televisivo, uno spettatore deve scegliere una porta fra tre. Una delle porte nasconde un'automobile nuova, le altre due, una vecchia capra ciascuna dette capra A e capra B. Il contenuto della porta scelta sarà il premio assegnato allo spettatore. Una volta fatta la scelta la porta non viene aperta ma il presentatore apre invece una fra le due porte non scelte che rivela una capra. Il presentatore poi offre allo spettatore la possibilità di cambiare la porta da lui inizialmente scelta con l'altra porta ancora chiusa. Sia p la probabilità (condizionata) che la porta così offerta contenga l'automobile. Verificare che:

- 1) $p = 2/3$ se la strategia del presentatore è quella di mostrare sempre una capra, senza preferenze tra le capre.
- 2) $p = 1/2$ se il presentatore apre una porta a caso.
- 3) $p = 1/(1 + a)$ se si vede la capra A e la strategia del presentatore è quella di mostrare sempre una capra e nel caso ci siano 2 capre mostrare la capra A con probabilità a .

Esercizio 7.* Sia S un insieme di cardinalità n . Si scelgono a caso, con 'rimpiazzo', due sottoinsiemi di S . Calcolare la probabilità che il primo sottoinsieme scelto sia incluso nel secondo.

Esercizio 8. In una città con $n + 1$ abitanti una persona è infetta. Costui infetta un altro abitante scelto a caso tra i possibili n , il secondo a sua volta infetta un abitante scelto a caso tra i possibili n (l'infezione può quindi tornare all'infetto originario), e così via.

- 1) Calcolare la probabilità che l'infezione si propaghi k volte senza ritornare alla fonte.
- 2) Calcolare la probabilità che l'infezione si propaghi k volte senza che colpisca più di una volta lo stesso abitante.