Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2025-26
Probabilità I, (L-Z) (Docente: L. Bertini)
Esercizi settimanali

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

Settimana 6

Esercizio 1. Lanciando un dado equo a 6 facce, sia X il risultato ottenuto.

1) Calcolare la distribuzione di X.
2) Calcolare il valore atteso di X.
3) Calcolare la varianza di X.

Rispondere alle precedenti domande nel caso in cui il dado abbia $n \in \mathbb{N}$ facce.

Esercizio 2. Lanciando due dadi equi a 6 facce, sia X il minimo tra i due risultati.

1) Calcolare la distribuzione di X.
2) Calcolare il valore atteso di X.

Rispondere alle precedenti domande nel caso in cui il dado abbia $n \in \mathbb{N}$ facce.

Esercizio 3. Si consideri un esame a risposta multipla organizzato al modo seguente. In totale ci sono 10 domande e per ogni domanda ci sono 4 possibili risposte, di cui una sola è corretta. L'algoritmo di valutazione è il seguente: ogni risposta giusta vale 3 e ogni risposta sbagliata (o non risposta) vale -1. Alice risponde a caso a tutte le 10 domande.

1) Calcolare la probabilità che Alice ottenga la sufficenza (almeno 18/30).
2) Calcolare il valore di attesa del voto di Alice.
3) Calcolare la varianza del voto di Alice.

Esercizio 4. Una scatola contiene 10 transistor di cui 3 sono rotti. Si esamina un transistor alla volta (senza rimpiazzo) finché non se ne trova uno rotto. Calcolare il valore di attesa del numero di transistor esaminati.

Esercizio 5. (Dimostrazione alternativa del principio di inclusione esclusione) Dato un evento A si indica con $\mathbf{1}_A$ la variabile aleatoria che vale 1 se $\omega \in A$ e 0 se $\omega \notin A$.

1) Siano A e B eventi. Verificare che $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$ e che $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
2) Siano $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Convincersi della validità dell'identità (binomiale)

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} \prod_{i\in I} a_i \prod_{j\in I^c} b_j.$$

3) Utilizzare i due punti precedenti e le proprietà del valore atteso per dimostrare il principio di inclusione esclusione.

Esercizio 6. Nelle partite di ping pong vince il primo giocatore che raggiunge 21 punti. Alice (A) e Bob (B) giocano una partita di ping pong. Ogni punto, l'uno indipendentemente dall'altro, viene vinto da A con probabilità $p \in [0, 1]$ o da B con probabilità $q = 1 - p$. Sia inoltre X la variabile aleatoria che conta il numero di punti disputati nella partita tra A e B.

1) Calcolare le probabilità di vittoria per A e B.

2) Trovare la distribuzione di X.

Esercizio 7.* In uno schema di Bernoulli con probabilità di testa $p \in (0, 1)$ sia X la variabile aleatoria che conta il numero di risultati consecutivi uguali al primo; ovvero $X = 1$ se il primo lancio è testa e il secondo croce oppure il primo croce ed il secondo testa, $X = 2$ se due teste e poi una croce oppure due croci e poi una testa,...

1) Trovare la distribuzione di X.

2) Calcolare il valore di attesa di X.

3) Calcolare la varianza di X.

Esercizio 8. Si dispone di una moneta truccata che rende testa con probabilità $p \in (0, 1) \setminus \{1/2\}$ e croce con probabilità $q = 1 - p$ e la si vuole utilizzare per simulare una moneta equa che renda 0 o 1 con uguale probabilità. A tal fine si procede come segue: si lancia la moneta truccata due volte, se TC si dichiara 1, se CT si dichiara 0, altrimenti la si lancia nuovamente due volte finché si raggiunge una decisione.

1) Verificare che si ottiene effettivamente 0 o 1 con uguale probabilità.

2) Calcolare la distribuzione ed il valore di attesa del numero di lanci necessari per giungere alla decisione se 0 o 1.