Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2025-26
Probabilità I, (L-Z) (Docente: L. Bertini)
ESERCIZI SETTIMANALI

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

SETTIMANA 7

Esercizio 1. (INDIPENDENZA DI VARIABILI ALEATORIE) Siano X e Y due variabili aleatorie.

1) Dimostrare che se X è una variabile aleatoria certa, ovvero $X = c$ per un qualche $c \in \mathbb{R}$, allora X e Y sono indipendenti.

2) Dimostrare che nel caso in cui X e Y sono binarie, ovvero $\big|\mathrm{Im}(X)\big| = \big|\mathrm{Im}(Y)\big| = 2$, le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti se e solo se $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

3) Costruire un esempio in cui $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$ ma X e Y non sono indipendenti.

Esercizio 2.* (VARIABILE ALEATORIA IPERGEOMETRICA) Si consideri un'urna con b palline bianche ed n palline nere. Si effettuano k estrazioni senza rimpiazzo ($k \le b+n$). Sia X_i, $i = 1,\dots,k$ la variabile aleatorie che vale 1 se l'i-ma pallina estratta è bianca e 0 se nera. Sia inoltre X il numero totale di palline bianche estratte.

1) Trovare la distribuzione di X.

2) Calcolare il valore di attesa di X.
(È richiesto sia il calcolo diretto a partire dalla distribuzione di X sia quello a partire dal valore di attesa di X_i.)

3) Calcolare la covarianza tra X_i e X_j, $i,j = 1,\dots,k$.

4) Calcolare la varianza di X.
(È richiesto sia il calcolo diretto a partire dalla distribuzione di X sia quello svolto scrivendo $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$ ed usando la risposta alla domanda precedente.)

Esercizio 3. Un dado equo viene lanciato finché non esce 5 o 6. Sia T il numero totale di lanci effettuati e X il risultato del dado nell'ultimo lancio effettuato.

1) Calcolare $\mathbb{P}(T = 3, X = 5)$.

2) Calcolare la distribuzione di T.

3) Calcolare la distribuzione di X.

4) Dire, giustificando la risposta, se le variabili aleatorie T e X sono indipendenti.

Esercizio 4. Quante volte bisogna lanciare – in media – un dado equo per vedere apparire tutte le facce?
SUGG. Utilizzando variabili aleatorie geometriche si trova la soluzione senza necessità di particolari calcoli.

Esercizio 5. Siano X_i, $i = 1,2,3$ variabili aleatorie indipendenti uniformi in $\{1,\dots,n\}$.

1) Calcolare la distribuzione di $X_1 + X_2$.

2) Calcolare la distribuzione di $X_1 + X_2 + X_3$.

Esercizio 6.* (COUPON COLLECTOR, II) Si consideri un album con n figurine per completare il quale si acquista una figurina al giorno (si supponga probabilità uniforme sulla distribuzione della figurina comprata ciascun giorno ed indipendenza tra figurine comprate in giorni diversi).

1) Dimostrare che il valore di attesa del numero di giorni necessari per completare l'album è dato da
$$K_n = n\Big[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\Big].$$

2) Dimostrare l'asintotica
$$K_n = n\Big[\log n + \varkappa + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big]$$
per un opportuna costante $\varkappa \in \mathbb{R}$ (è richiesto trovare una formula per $\varkappa$, ma non il suo calcolo esplicito).

3) Trovare la varianza del numero di giorni necessari per completare l'album.

SUGG. Ragionare in termini di variabili aleatorie geometriche.

Esercizio 7. Siano T_1 e T_2 due variabile aleatorie indipendenti e geometriche rispettivamente di parametri p_1 e p_2.

1) Calcolare $\mathbb{P}(T_1 = T_2)$.

2) Calcolare $\mathbb{P}(T_1 \geq 2T_2)$.

3) Determinare la distribuzione della variabile aleatoria $\min\{T_1, T_2\}$.

Esercizio 8. Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{Z}_+$, dimostrare che
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$