Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2025-26
Probabilità I, (L-Z) (Docente: L. Bertini)
ESERCIZI SETTIMANALI

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

SETTIMANA 8

Esercizio 1. Ogni giorno Carlo riceve un numero aleatorio X di email, che possiamo pensare come una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Ogni email, indipendentemente dalle altre e dal numero totale di email ricevute, è spam con probabilità p e legittima con probabilità $1-p$. Siano Y e Z rispettivamente il numero di email di spam e di email legittime ricevute oggi da Carlo.

1) Determinare le distribuzioni di Y e Z.

2) Dire, giustificando la risposta, se Y e Z sono variabili aleatorie indipendenti.

Esercizio 2. Una moneta con probabilità di testa pari a $p \in [0,1]$ viene lanciata un numero di volte aleatorio (indipendente dai risultati dei lanci della moneta) con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Trovare le dstribuzioni del numero totale di teste e croci otteneute e dimostrare che queste due variabili aleatorie sono indipendenti.

Esercizio 3. Si consideri la disposizione casuale di n palline in k scatole: ogni pallina sceglie, indipendentemente dalle altre, una scatola con probabilità uniforme. Sia $X_i = 0, \dots, n$ il numero di palline nella scatola i, con $i = 1, \dots, k$.

1) Calcolare la distribuzione di X_1.

2) Calcolare la covarianza tra X_1 e X_2.

Si consideri il limite in cui $k, n \to \infty$ con $\frac{n}{k} \to \lambda \in (0, +\infty)$

3) Calcolare la distribuzione limite di X_1.

4) Dimostrare che in questo limite le variabili aleatorie X_1 e X_2 diventano indipendenti.

Esercizio 4. Siano $Z_1, \dots, Z_k$ variabili aleatorie di Poisson di parametro $\lambda \in (0, \infty)$ indipendenti.

1) Calcolare la distribuzione di Z_1 condizionata all'evento $Z_1 + \cdots + Z_k = n$, $n \in \mathbb{N}$, ovvero
$$\mu_1(z|n) := \mathbb{P}\big(Z_1 = z \big| Z_1 + \cdots + Z_k = n\big).$$

2) Calcolare la distribuzione di Z_1 e Z_2 condizionata all'evento $Z_1 + \cdots + Z_k = n$, $n \in \mathbb{N}$, ovvero
$$\mu_{12}(z_1, z_2|n) := \mathbb{P}\big(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2 \big| Z_1 + \cdots + Z_k = n\big).$$

3) Condizionatamente all'evento $Z_1 + \cdots + Z_k = n$, $n \in \mathbb{N}$, calcolare la covarianza tra Z_1 e Z_2, ovvero:
$$\mathrm{cov}(Z_1, Z_2|n) := \sum_{z_1, z_2} z_1 z_2 \mu_{12}(z_1, z_2|n) - \sum_{z_1, z_2} z_1 \mu_{12}(z_1, z_2|n) \sum_{z_1, z_2} z_2 \mu_{12}(z_1, z_2|n).$$

4) Confrontare i risultati con quelli ottenuti nell'esercizio precedente.

Esercizio 5. Siano $X_1, \dots, X_k$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione di Bernoulli di parametro $p \in (0,1)$.

1) Determinare la distribuzione congiunta di $X_1, \dots, X_k$ condizionatamente all'evento $X_1 + \cdots + X_k = n$, ovvero
$$\mu(n_1, \dots, n_k|n) := \mathbb{P}\big(X_1 = n_1, \dots, X_k = n_k \big| X_1 + \cdots + X_k = n\big).$$

2) Identificare la risposta al punto precedente come probabilità uniforme e interpretarla come disposizione di n palline in k scatole.

Esercizio 6. Siano $X_1, \ldots, X_k$ variabili aleatorie a valori in $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \ldots\}$ indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione $\mathbb{P}(X_i = n) = p(1-p)^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $p \in (0,1)$. Ovvero $X_i + 1$ ha distribuzione geometrica di parametro p.

1) Determinare la distribuzione di $X_1 + \cdots + X_k$.

2) Determinare la distribuzione congiunta di $X_1, \ldots, X_k$ condizionatamente all'evento $X_1 + \cdots + X_k = n$, ovvero

$$\mu(n_1, \ldots, n_k | n) := \mathbb{P}\big(X_1 = n_1, \ldots, X_n = n_k \big| X_1 + \cdots + X_k = n\big).$$

3) Identificare la risposta al punto precedente come probabilità uniforme e interpretarla come disposizione di n palline in k scatole.

Esercizio 7.* (Distanza in variazione totale) Sia $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ l'insieme delle probabilità su $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, \ldots\}$ (rispetto alla σ-algebra di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{Z}_+$). Sia $d_{\mathrm{TV}} \colon \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) \to \mathbb{R}_+$ la funzione (*distanza in variazione totale*) definita da

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) := \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \big|\mu(\{i\}) - \nu(\{i\})\big|.$$

1) Verificare che d_{TV} è una distanza.

2) Dimostrare che

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) = \sup_{A \subset \mathbb{Z}_+} \big|\mu(A) - \nu(A)\big|.$$

3) Dimostrare che

$$2\, d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) = \sup_{\substack{f \colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R} \\ |f| \le 1}} \big|\mathbb{E}_\mu(f) - \mathbb{E}_\nu(f)\big|$$

ove $\mathbb{E}_\mu(f)$ è il valore di attesa di f rispetto a μ.

4) Dimostrare che $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ con la distanza d_{TV} è uno spazio metrico completo.

Esercizio 8.* (Convergenza della binomiale alla poissoniana con stima dell'errore)

1) Siano X, Y due variabili aleatorie sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valori in $\mathbb{Z}_+$. Siano inoltre $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ le distribuzioni di X, Y. Dimostrare la diseguaglianza

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) \le \mathbb{P}(X \neq Y).$$

2) Sia X una variabile aleatoria di Bernoulli di parametro $p \in [0,1]$ e Y una variabile aleatoria di Poisson anch'essa di parametro p. Realizzare X e Y sullo stesso spazio di probabilità in modo che

$$\mathbb{P}(X \neq Y) \le p^2.$$

3) Dati $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ed $n \in \mathbb{N}$ con $\lambda/n \le 1$ siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili di Bernoulli (tra loro indipendenti) di parametro λ/n e $Y_1, \ldots, Y_n$ variabili di Poisson (tra loro indipendenti) di parametro λ/n. Realizzare queste variabili aleatorie sullo stesso spazio di probabilità in modo che

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=1}^n Y_i\Big) \le \frac{\lambda^2}{n}.$$

4) Dati $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ed $n \in \mathbb{N}$ con $\lambda/n \le 1$ sia $\mu_n \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ la distribuzione bionomiale di parametri n e λ/n e μ la distribuzione di Poisson di parametro λ. Dimostrare che

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu_n, \mu) \le \frac{\lambda^2}{n}.$$