



Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2025-26
Probabilità I, (L-Z) (Docente: L. Bertini)
ESERCIZI SETTIMANALI

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

SETTIMANA 9

Esercizio 1. Una scatola contiene 10 transistor di cui 3 sono rotti. Si esamina un transistor alla volta (senza rimpiazzo) finché non se ne trova uno rotto. Calcolare il valore di attesa del numero di transistor esaminati.

Esercizio 2. (COSTRUZIONE INTERVALLI DI CONFIDENZA) Si consideri una moneta truccata con parametro di truccatura p incognito. Al fine di determinare p , si lancia la moneta n volte e si stima p con S_n/n , ove S_n è il numero di teste negli n lanci effettuati. Utilizzando la diseuguaglianza di Chebyshev, dato $\delta > 0$ determinare quanto grande deve essere n affinché la probabilità che $|S_n/n - p| < \delta$ sia almeno del 95%.

Esercizio 3. Sia $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie che converge in probabilità a $m \in \mathbb{R}$.

- 1) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che la successione di variabili aleatorie $Y_n := f(X_n)$ converge in probabilità a $f(m)$.
- 2) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata. Dimostrare che la successione (numerica) $\mathbb{E}(f(X_n))$ converge a $f(m)$.
- 3) Costruire un esempio in cui X_n converge in probabilità a 0, ma $\mathbb{E}(X_n)$ non converge a 0.

Dimostrare infine che $(X_n)_n$ converge in probabilità a m se e solo se $\mathbb{E}(f(X_n))$ converge a $f(m)$ per ogni funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e limitata.

Esercizio 4.* (METRIZZABILITÀ DELLA CONVERGENZA IN PROBABILITÀ) Dato lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ [si può considerare il caso in cui Ω è finito o numerabile e \mathcal{F} è la collezione dei sottoinsiemi di Ω], sia \mathcal{V} la collezione delle variabili aleatorie su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Introdurre una metrica $d(\cdot, \cdot)$ su \mathcal{V} tale che $\lim_n d(X_n, X) = 0$ se e solo se $(X_n)_n$ converge in probabilità a X .

Esercizio 5. (VARIANTE TEOREMA DI POISSON) Sia X_n una successione di variabili aleatorie a valori in \mathbb{Z}_+ e X una variabile aleatoria a valori in \mathbb{Z}_+ . Per definizione (*provvisoria*), X_n converge in distribuzione a X se e solo se per ogni $k \in \mathbb{Z}_+$ si ha $\lim_n \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$.¹

- 1) Sia X_n una successione di variabili aleatorie che converge in distribuzione a X ed Y_n una successione di variabili aleatorie (sempre a valori in \mathbb{Z}_+) che converge a zero in probabilità, ovvero tale che $\lim_n \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1$. Dimostrare che la successione di variabili aleatorie $X_n + Y_n$ converge in distribuzione a X .
- 2) Siano X_1, X_2, \dots, X_n variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite a valori in \mathbb{Z}_+ soddisfacenti $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p_n - q_n$, $\mathbb{P}(X_i = 1) = p_n$, $\mathbb{P}(X_i \geq 2) = q_n$ con $p_n, q_n \geq 0$ tali che $np_n \rightarrow \lambda$ e $nq_n \rightarrow 0$. Posto $Z_n := \sum_{i=1}^n X_i$, dimostrare che Z_n converge in distribuzione ad una variabile di Poisson di parametro λ .

Esercizio 6. Siano X_1, X_2, \dots, X_n variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione di Poisson di parametro λ/\sqrt{n} , $\lambda > 0$. Sia inoltre $Y_n := \max_{i=1, \dots, n} X_i$. Dimostrare che Y_n converge in distribuzione ad una variabile aleatoria Y ed identificare la distribuzione di Y . SUGG. Scrivere la probabilità dell'evento $\{Y_n \leq \ell\}$ per $\ell = 0, 1, 2$ e passare al limite per $n \rightarrow \infty$.

¹Oss. Le variabili aleatorie X_n e X non sono necessariamente definite sullo stesso spazio di probabilità, è appunto richiesta solo la convergenza della distribuzione.