Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2025-26
**Probabilità I**, (L-Z) (Docente: L. Bertini)
Esercizi settimanali

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

Settimana 10

**Esercizio 1.** Da un gruppo di 7 batterie, di cui 3 nuove, 2 usate ma funzionanti e 2 difettose, ne vengono scelte 3 a caso. Siano $X$ e $Y$ rispettivamente il numero di batterie nuove e usate (ma funzionanti) tra quelle scelte.

*1)* Determinare la distribuzione congiunta di $(X, Y)$ e le distribuzioni marginali di $X$ e di $Y$.

*2)* Calcolare $\mathrm{cov}(X, Y)$. Le variabili aleatorie $X$ e $Y$ sono indipendenti?

*3)* Le tre batterie scelte sono montate su di un apparecchio che funziona se nessuna di esse è difettosa. Determinare la probabilità che l'apparecchio funzioni.

**Esercizio 2.** I componenti elettronici prodotti in una fabbrica sono difettosi, l'uno indipendentemente dall'altro, con probabilità $p$ e funzionanti con probabilità $1-p$, $p \in (0,1)$. Vengono sottoposti ad un controllo di qualità con la seguente modalità: ogni componente, l'uno indipendentemente dall'altro, viene ispezionato con probabilità $\alpha$ e non ispezionato con probabilità $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Un componente trovato difettoso viene scartato, mentre gli altri vengono messi in commercio. Si supponga di avere $n$ componenti prodotti dalla fabbrica.

*1)* Calcolare la distribuzione del numero di componenti che vengono scartati dopo il controllo di qualità.

*2)* Sapendo che il numero di componenti scartati dopo il controllo di qualità è pari a $k$, $k = 0, 1, \dots, n$, calcolare la distribuzione dei componenti difettosi tra gli $n-k$ messi in commercio.

*3)* Siano $X$ il numero di componenti messi in commercio e $Z$ il numero di componenti difettosi messi in commercio. Calcolare $\mathbb{E}(Z/X|X)$ e $\mathbb{E}(Z/X)$.

**Esercizio 3.** A e B giocano al seguente gioco: A scrive 1 o 2 su un foglio e B deve indovinare il numero scritto da A Se A ha scritto $i \in \{1, 2\}$ e B indovina allora A paga $i$ euro a B. Se invece B non indovina allora B paga 0.75 euro ad A.

Si supponga che B adotti una strategia casuale dichiarando 1 con probabilità $p$ e 2 con probabilità $1-p$.

*1)* Supponendo che A abbia scritto 1 determinare il guadagno medio di B

*2)* Supponendo che A abbia scritto 2 determinare il guadagno medio di B

*3)* determinare il valore di $p$ che massimizza il minimo tra i 2 guadagni medi precedenti.

Si supponga che A adotti una strategia casuale scrivendo 1 con probabilità $q$ e 2 con probabilità $1-q$.

*4)* Supponendo che B dichiari 1 determinare la perdita media di A.

*5)* Supponendo che B dichiari 2 determinare la perdita media di A.

*6)* determinare il valore di $q$ che minimizza la massima tra le 2 perdite medie precedenti.

Confrontare le risposte ai punti 3 e 6.

**Esercizio 4.** Siano $X$ e $Y$ variabili aleatorie di Poisson indipendenti rispettivamente di parametro $\lambda$ e $\mu$. Calcolare $\mathbb{E}(X|X+Y)$ e $\mathbb{E}(X+Y|X)$.

**Esercizio 5.** Si consideri un urna con $n$ palline. Ogni pallina, l'una indipendentemente dall'altra, viene dipinta di rosso con probabilità $p$ o di blu con probabilità $1-p$, $p \in [0,1]$. Si estraggono poi, senza rimpiazzo, $k$ palline dall'urna, $k \leq n$. Siano $Y$ il numero delle palline dipinte di blu e $X$ il numero di palline blu estratte.

*1)* Determinare le distribuzioni marginali delle variabili aleatorie $X$ e $Y$.

*2)* Determinare la distribuzione di $Y$ condizionata a $X$.

*3)* Determinare la distribuzione di $X$ condizionata a $Y$.

*4)* Calcolare la covarianza tra $X$ e $Y$.

**Esercizio 6.*** Un'urna contiene $n$ palle rosse ed $m$ palle blu. Si estraggono le palle una alla volta senza rimpiazzo. Sia $X$ la variabile aleatoria data dal numero dell'estrazione a cui esce la prima palla blu (ad esempio, se si estrae R, R, B, si ha $X = 3$).

*1)* Calcolare il valore atteso di $X$.

L'estrazione continua fino a quando nell'urna vi sono solo palle dello stesso colore.

*2)* Calcolare il valore atteso del numero di palle rimaste nell'urna.