



Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2025-26  
**Probabilità I, (L-Z)** (Docente: L. Bertini)  
ESERCIZI SETTIMANALI

Gli esercizi e le domande contrassegnate con \* sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

SETTIMANA 11

**Esercizio 1.** Siano  $X_i, i = 1, 2$  variabili aleatorie uniformi in  $[0, 1]$  indipendenti.

- 1) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di  $X_1 + X_2$ .
- 2) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di  $\max\{X_1, X_2\}$ .
- 3) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di  $\min\{X_1, X_2\}$ .

**Esercizio 2.** Siano  $U$  una variabile aleatoria uniforme in  $(0, 1)$  e  $V$  una variabile aleatoria indipendente da  $U$  uniforme in  $(-1, 1)$ .

- 1) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di  $V^2$ .
- 2) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di  $\log(1/U)$ .
- 3) Calcolare  $\mathbb{P}(U \leq V)$ .

**Esercizio 3.** Siano  $T_i, i = 1, 2$  variabili aleatorie esponenziali di parametro  $\lambda > 0$  indipendenti.

- 1) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di  $T_1 + T_2$ .
- 2) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di  $\max\{T_1, T_2\}$ .
- 3) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di  $\min\{T_1, T_2\}$ .

**Esercizio 4.** Ogni giorno Vanya beve un volume d'acqua aleatorio, ed assumiamo che il volume  $X_k$  bevuto al giorno  $k$  sia una variabile aleatoria positiva, di attesa finita, ma non limitata (ossia  $\mathbb{P}(X_k > v) > 0$  per ogni  $v \in \mathbb{R}$ ). Assumiamo inoltre che le variabili aleatorie  $X_1, X_2, \dots$  siano indipendenti ed abbiamo tutte la stessa distribuzione.

Per  $v \geq 0$ , definiamo  $T_v := \inf\{k \in \mathbb{N} : X_k > v\}$ . Ossia  $T_v$  è il numero di giorni trascorsi prima che Vanya beva (in un giorno) almeno un volume  $v$  di acqua.

- 1) Determinare la distribuzione della variabile aleatoria  $T_v$ , a partire dalla distribuzione di  $X$ .
- 2) Calcolare il valore di attesa di  $T_v$  e mostrare che  $\lim_{v \rightarrow +\infty} \mathbb{E}T_v = +\infty$ .
- 3) Mostrare che  $\lim_{v \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_v > \mathbb{E}T_v) = e^{-1}$ .

**Esercizio 5.** Si consideri il circuito in figura, dove i tempi di rottura dei componenti 1, 2, 3 sono

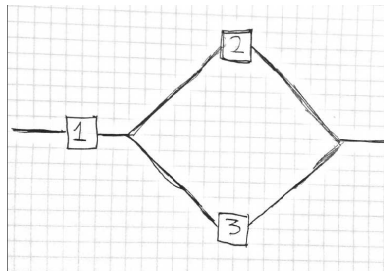


FIGURA 1. Il circuito si considera funzionante se il componente 1 funziona ed almeno uno tra i componenti 2 e 3 funziona.

variabili aleatorie esponenziali indipendenti rispettivamente di parametri  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

- 1) Determinare la distribuzione del tempo di rottura del circuito.
- 2) Calcolare esplicitamente il valore di attesa del tempo di rottura del circuito.
- 3) Sapendo che al tempo  $T$  il circuito funziona, calcolare la probabilità che uno tra i componenti 2 e 3 si sia rotto.

**Esercizio 6.** Sia  $X$  una variabile aleatoria *continua o discreta* positiva ( $X \geq 0$ ) con funzione di distribuzione  $F(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$ . Dimostrare la formula

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} [1 - F(x)] dx.$$

**Esercizio 7.** Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie. La *varianza condizionale* di  $Y$  dato  $X$  è la variabile aleatoria (positiva) definita da

$$\mathbb{V}(Y|X) := \mathbb{E}\left([Y - \mathbb{E}(Y|X)]^2 \middle| X\right)$$

assumendo l'esistenza dei rispettivi valori di attesa. Dimostrare la formula

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{V}(Y|X)) + \mathbb{V}(\mathbb{E}(Y|X)).$$

e convincersi che esprime il teorema di Pitagora in  $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ .

**Esercizio 8.\*** (PROCESSO DI POISSON) Si consideri una bicicletta soggetta a forature. Più precisamente, i tempi di foratura sono  $\tau_1, \tau_1 + \tau_2, \dots, \tau_1 + \dots + \tau_n, \dots$  ove  $\tau_i \geq 0, i = 1, 2, \dots$  sono variabili aleatorie esponenziali di parametro  $\lambda > 0$  indipendenti.

- 1) Determinare la distribuzione del tempo dell' $n$ -ma foratura, ovvero di  $\tau_1 + \dots + \tau_n$ .
- 2) Dato  $T > 0$ , trovare la distribuzione del numero  $N_{[0, T]}$  di forature nell'intervallo  $[0, T]$ .
- 3) Dati  $0 \leq T_1 < T_2 < T_3 < T_4$  siano rispettivamente  $N_{[T_1, T_2]}$  e  $N_{[T_3, T_4]}$  il numero di forature negli intervalli  $[T_1, T_2]$  e  $[T_3, T_4]$ . Dimostrare che le variabili aleatorie  $N_{[T_1, T_2]}$  e  $N_{[T_3, T_4]}$  sono indipendenti.
- 4) Per  $n \geq 1$ , siano  $X_1, \dots, X_n$  variabili aleatorie uniformi in  $[0, T]$  indipendenti. Sia inoltre  $Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  la più piccola tra le  $X_i$ . Determinare la distribuzione di  $Y$ .
- 5) Dimostrare la seguente affermazione: condizionatamente all'evento  $\{N_{[0, T]} = n\}$ , il tempo di prima foratura  $\tau_1$  ha la stessa distribuzione della variabile aleatoria  $Y$  del punto precedente.

Interpretare i risultati ottenuti in termini di limite Poissoniano di uno schema di Bernoulli.