Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2025-26
Probabilità I, (L-Z) (Docente: L. Bertini)
ESERCIZI SETTIMANALI

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

SETTIMANA 12

Esercizio 1. Le sfere di acciaio prodotte dalla ACME devono avere un diametro di $5\,\mathrm{mm}$. Sono tuttavia accettabili sfere di diametro compreso tra $4\,\mathrm{mm}$ e $6\,\mathrm{mm}$. Si assuma che i diametri delle sfere prodotte siano variabili aleatorie gaussiane indipendenti di media $5\,\mathrm{mm}$ e varianza $0.25\,\mathrm{mm}^2$.

1) Quale percentuale dei pezzi prodotti non rispetta i limiti di tolleranza?

2) Potendo ricalibrare di produzione, modificando la varianza delle sfere, si determini il valore massimo della varianza per cui la percentuale di pezzi che non rispettano i limiti di tolleranza sia inferiore all'1%.

Esercizio 2. Per trasmettere un bit da una sorgente A a una ricevente B tramite una coppia di fili elettrici, si applica una differenza di potenziale di $+2\,\mathrm{V}$ per il valore 1 e di $-2\,\mathrm{V}$ per il valore 0. A causa di disturbi elettromagnetici, se A applica $\mu = \pm 2\,\mathrm{V}$, B legge $X = \mu + Z$, dove Z rappresenta il rumore, descritto da una variabile aleatoria gaussiana di media 0 e varianza $1\,\mathrm{V}^2$. Dalla lettura di X, B decodifica il messaggio con la seguente regola: se $X \geq 0.5\,\mathrm{V}$ si decodifica 1, mentre se $X < 0.5\,\mathrm{V}$ si decodifica 0.

1) Se A invia 0, calcolare la probabilità che B decodifichi 1.

2) Se A invia 1, calcolare la probabilità che B decodifichi 0.

Si supponga ora che A invii 0 o 1 con la stessa probabilità.

3) Calcolare la probabilità che B decodifichi 1.

4) Se B ha decodificato 1 calcolare la probabilità che la decodifica corrisponda al messaggio inviato.

Esercizio 3. Siano X, Y variabili aleatorie gaussiane standard (valore di attesa 0 e varianza 1) indipendenti.

1) Determinare la densità di probabilità della variabile aleatoria X^2.

2) Determinare la densità di probabilità della variabile aleatoria $X^2 + Y^2$.

Esercizio 4. Sia Z una variabile aleatoria gaussiana standard.

1) Per $k \in \mathbb{N}$ calcolare $\mathbb{E}(Z^k)$.

Siano ora $X_1, \ldots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite tali che $\mathbb{E}(X_i) = 0$, $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$ e $\mathbb{E}|X_i|^k < \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Si ponga infine $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$.

2) Per $k \in \mathbb{N}$ calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z_n^k)$ e confrontare con il risultato del punto precedente.

*3)** Dalle domande precedenti si può concludere il teorema limite centrale? Quali sarebbero i punti mancanti? [N.B. Non è richiesta la dimostrazione, ma solo l'individuazione delle parti mancanti.]

Esercizio 5. Durante il regno di Mongke Khan, la posta viaggiava lungo la strada dello Yam. A distanze regolari i postini potevano utilizzare delle stazioni per cambiare i cavalli e percorrere migliaia di chilometri con facilità. Supponiamo che un messo debba compiere un lungo viaggio passando per $n = 400$ stazioni di servizio (oltre a quella di partenza) per portare a destinazione un messaggio di Mongke Khan. Sia T_i il tempo impiegato a coprire il percorso tra la $i-1$-esima e la i-esima stazione. Assumiamo che le $(T_i)_{i=1}^{400}$ siano delle variabili aleatorie indipendenti, identicamente distribuite e tali che

$$\mathbb{P}(T_i \geq t) = (1 + \lambda t) \exp(-\lambda t) \qquad \forall t \geq 0,\, i = 1, \ldots, 400$$

per un'opportuna costante $\lambda > 0$.

1) Tale equazione identifica la legge di T_i?

2) Calcolare la densità di probabilità di T_i.

3) Calcolare il valore di attesa e la varianza di T_i.

Prima di partire, il messo deve stimare il tempo di percorrenza $\sum_{i=1}^{400} T_i$ del suo viaggio. Egli deve comunicare al Mongke Khan un tempo stimato τ, tale che la probabilità che egli impieghi più di τ ad arrivare a destinazione sia minore del 5%.

4) Supponendo che il messo disponesse delle tavole dell'integrale gaussiano[1], ed effettuando la dovuta approssimazione, determinare la migliore scelta di τ (in funzione di λ).

Esercizio 6.* (Convergenza in distribuzione di variabili aleatorie) Per definizione, la successione di variabili aleatorie $(X_n)_n$ converge in distribuzione alla variabile aleatoria X se $\mathbb{E}f(X_n) \to \mathbb{E}f(X)$ per ogni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e limitata.[2]

1) Sia $(x_n)_n$ una successione numerica, $x_n \in \mathbb{R}$, convergente ad un qualche $x \in \mathbb{R}$. Sia inoltre X_n la variabile aleatoria certa $X_n := x_n$. Verificare che X_n converge in distribuzione alla variabile aleatoria certa $X := x$. Verificare inoltre l'affermazione inversa: se $X_n = x_n$ converge in distribuzione a X allora X è una variabile aleatoria certa e la successione numerica x_n converge al valore di X.

2) Dimostrare che è sufficente richiedere la convergerza per le funzioni uniformemente continue. Ovvero se $\mathbb{E}f(X_n) \to \mathbb{E}f(X)$ per ogni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua e limitata allora $\mathbb{E}f(X_n) \to \mathbb{E}f(X)$ per ogni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e limitata.

3) Dimostrare che se X_n converge in distribuzione a X e Y_n converge a zero in probabilità allora $X_n + Y_n$ converge in distribuzione a X.
Sugg. Utilizzare il risultato del punto precedente.

4) Siano X_n e X variabili aleatorie a valori in $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, \ldots\}$. Dimostrare che X_n converge in distribuzione a X se e solo se per ogni $k \in \mathbb{Z}_+$ si ha $\mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k)$.

5) Sia X una variabile aleatoria con funzione di distribuzione $F\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ continua. Sia inoltre F_n la funzione di distribuzione di X_n. Dimostrare che X_n converge in distribuzione a X se e solo se per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $F_n(x) \to F(x)$. Concludere che per ogni $a < b$ reali si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a < X_n \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b).$$

6) Dire se la conclusione del punto precedente è ancora vera senza l'ipotesi che la funzione di distribuzione di X sia continua.

[1] Le tavole dell'integrale gaussiano furono tra le prime tavole numeriche di funzioni speciali ad essere compilate. Comunque oltre cinque secoli dopo il Mongke Khan.

[2] Oss. Si noti che le variabili aleatorie X_n possono essere definite su spazi di probabilità diversi, si richiede appunto la convergenza della loro distribuzione.